理学専攻 数理科学分野

位相幾何学研究室　　**教授**　　**佐久間一浩**
Topology Lab.　　Prof.　　Kazuhiro Sakuma

キーワード
多様体、微分可能写像、特異点、トム多項式、折り目特異点、安定スパン、特性類、コボルディズム
Manifold, Differentiable maps,, Singularities, Thom polynomial, fold singularities, stable span, characteristic classes, cobordism

研究内容

［1］　多様体の埋め込み予想について

可微分閉多様体からユークリッド空間への無限階微分可能写像は、定義域の次元が値域の次元よりも小さいときには、特異点をもたない写像である埋め込みとはめ込みが存在し得る。「埋め込み予想」と「はめ込み予想」が特に基本的でよく知られている。

これは定義域多様体の次元をｎとするとき、任意の閉多様体に対して、2n-a(n)+1 次元ユークリッド空間へ埋め込み可能、2n-a(n)次元ユークリッド空間へはめ込み可能であろうという予想である。ここで、a(n)は n を２進数展開したときの１の個数を表す。１９７１年にブラウンにより、双方の予想が up to cobordism で肯定的に解決した。一方、１９８５年にコーエンにより、「はめ込み予想」は高度なホモトピー論を駆使した結果、やはり肯定的に解決した。しかしながら、著者の知る限り、「埋め込み予想」の方は未解決である。コーエンの結果ははめ込みをスメール・ハーシュのホモトピー原理に基づいて解決したもので、これを埋め込み写像の場合に拡張しようとすると、はめ込み写像に生じる多重点集合を特異点と考えて、この多重点集合を消去することを考える。その際に、微分可能写像の特異点論の枠組みによる研究が役立つと考えている。

［2］　微分可能写像に現れる特異点の構造を通して多様体の微分構造や位相構造を調べる

可微分閉多様体からユークリッド空間への無限階微分可能写像は、定義域の次元が値域の次元よりも大きいときには、簡単な微積分から、必ず特異点が現れることがわかる。そのような特異点の中でも、最も簡単でいつでも現れるのが折り目特異点と呼ばれるものである。

折り目特異点の標準形は、モース特異点の拡張にあたるものである。そこで、閉多様体が与えられたとき、特異点としては折り目しか現れない写像を折り目写像とよぶ。そこで問題となるのが、「いつ折り目写像が存在するか？」である。値域の次元が１次元のときは、折り目写像はすなわちモース関数のことであるから、任意の閉多様体に対して存在する、が答えとなる。値域の次元が２次元のときは、１９７０年代にトムーレヴィンーエリアシュベルグにより、折り目写像が存在するための必要十分条件は、定義域多様体のオイラー標数が偶数のときである、と解決した。一方、値域の次元が３次元以上になると問題は格段に難しくなる。しかし、近年の研究で３次元と４次元の場合に問題を解決することができた。５次元以上の場合は未解決な場合が多い。

最近の業績

[1] R.Sadykov, O. Saeki and K.Sakuma, Obstructions to the existence of fold maps, J. London Math. Soc. Vol. 81 (2010), 338-354.

[2] 佐久間一浩、「高校数学と大学数学の接点」、日本評論社、２０１２年９月

■　科学研究費　基盤研究（A）（2011～2016 年度）
■　科学研究費　基盤研究（C）（2009～2011 年度）
■　科学研究費　基盤研究（B）分担（2007～2010 年度）