

## キーワード

セルオートマトン、確率セルオートマトン、  
確率過程、離散可積分系

Cellular Automata, Stochastic Cellular Automata,  
Stochastic Process, Discrete Integrable System

## 研究内容

セルオートマトンは時間、空間、状態変数がすべて離散的であるような離散時間発展系であり、きわめてシンプルな局所的遷移則に従ってそのダイナミクスが規定されるにもかかわらず、非常に豊かな数理構造を持つことが知られている。また、セルオートマトンに確率変数を導入した拡張系は、交通流や感染症の時間変化を説明するための現象数理モデルとしても用いられている。このような背景の下、本研究室では以下のアプローチによって確率セルオートマトンの数理構造の解析を行っている。

### [1] 分解仮設を用いた解析

空間無限大の条件の下で、局所的な物理量の相関関数に関する等式である分解仮設を用い、高次保存量を持つ確率セルオートマトンの漸近的な物理量を厳密に導出した。その際、高次保存量を持つ系を、超離散 Cole-Hopf 変換と呼ばれる変数変換によって低次保存量を持つ系に変換した。これにより系を解析可能な形に帰着させ、時間無限大における物理量に関する平衡方程式を解くことで、系の厳密解析を行った。具体的には、基本図と呼ばれる系の保存量密度と流束の依存関係を理論的に導出することに成功した[1]。

### [2] 遷移確率行列を用いた解析

空間有限の条件の下、保存量を持つ確率セルオートマトンの定常分布を厳密に導出した。特殊な空間の条件下で、系を1次元の離散確率過程とみなし、状態空間を系が持つ保存量によって縮約しつつ、遷移確率行列の固有問題を解くことで、その定常分布を導出した。さらに、多項式として表現される固有ベクトルの各要素の因数分解可能性を用いて、一般の有限空間における系の定常分布を導いた。また導出した分布が GKZ 超幾何関数と呼ばれる Gelfand、Kapranov、Zelevinsky が提唱した超幾何関数の一種で表現されることを発見した。この表現を用いることにより、基本図の熱力学的極限の計算を行った。この計算結果は分解仮設を用いた解析結果とも一致しており、それぞれの解析結果の橋渡しをしている形となっている[4]。

### [3] 一般系の導出と高次元基本図の解析

確率バーガースセルオートマトンと呼ばれるベンチマークとなる系を出発点とし、上述した遷移確率行列の手法を用いて解析可能な一般系を任意の近傍

において導出することに成功した。これらの系を解析することにより、これまでひとつの保存量密度にのみ依存していた流束が、複数の保存量に依存して一意に求まる例を発見し、系の高次元基本図を理論的に導出することに成功した[5][6]。高次元の基本図に関しては、都市工学における交通流の解析において実証的に用いられている研究があり、上述の研究結果の現象数理モデル研究への応用が期待できる。

### [4] 可積分系に関連する系の解析

本研究室では上述した系以外にも、可積分系と呼ばれるクラスに関連した系の解析を行っている。論文[3]では、時間発展の幾何学的パターンにある種のソリトン性を持つような系の解析に参加した。具体的には、グローバルセルオートマトンと呼ばれる、大域的な相互作用に基づいて時間発展する系について、その物理量の統計的な解析を行った。また、論文[2]では弾性体上の波動現象を表現する連続系のソリトン性についての研究に参加し、系の非線形相互作用のパラメータ計算を行った。

## 最近の業績

[1] [K. Endo](#), D. Takahashi, J. Matsukidaira,

“On fundamental diagram of stochastic cellular automata with a quadratic conserved quantity”,  
NOLTA, IEICE, 7, 313–323, 2016

[2] N. Bekki, K. Ishii, [K. Endo](#),

“Soliton for Nonlinear Rayleigh Surface Waves on Homogeneous Isotropic Materials”,  
Journal of the Physical Society of Japan, The Physical Society of Japan, **88**, 1–10, 2018

[3] 坂田幸太郎, [延東和茂](#), 高橋大輔,

“グローバルセルオートマトンの諸性質の解析”,  
九州大学応用力学研究所 非線形波動研究の新潮流 研究集会報告,  
九州大学応用力学研究所, 88–93, 2018

[4] [K. Endo](#),

“New approach to evaluate the asymptotic distribution of particle systems expressed by probabilistic cellular automata”,  
Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Springer, **37**, 461–484, 2020

[5] [K. Endo](#), D. Takahashi,

“Three-dimensional fundamental diagram of particle system of 5 neighbors with two conserved densities”,  
JSIAM Letters 2022, **14**, 80–83, 2022

[6] [K. Endo](#),

“Asymptotic behavior of a stochastic particle system of 5 neighbors”,  
arXiv:2202.02499, 2022

■ 科学研究費 若手研究 (2022年4月 - 2027年3月) .